Alina Paraschiv
Luminița Dumitrescu
Florentina Enea
Livia Harabagiu

Ministerul Educației

7

Matematică

Manual pentru clasa a VII-a

EDITURA CD PRESS
www.cdpress.ro

Competențe generale și specifice

1. Identificarea unor date, mărimi și relații matematice, în contextul în care acestea apar

1.1. Identificarea numerelor aparținând diferitelor submulțimi ale lui $\mathbb{R}$;
1.2. Identificarea unei situații date rezolvabile prin ecuații sau sisteme de ecuații liniare;
1.3. Identificarea unor informații din tabele, grafice și diagrame;
1.4. Identificarea patrulaterelor particulare în configurații geometrice date;
1.5. Identificarea elementelor cercului și/sau poligoanelor regulate în configurații geometrice date;
1.6. Identificarea triunghiurilor asemenea în configurații geometrice date;
1.7. Recunoașterea elementelor unui triunghi dreptunghic într-o configurație geometrică dată.

2. Prelucrarea unor date matematice de tip cantitativ, calitativ, structural, cuprinse în diverse surse informaționale

2.1. Aplicarea regulilor de calcul pentru estimarea și aproximarea numerelor reale;
2.2. Utilizarea regulilor de calcul cu numere reale pentru verificarea soluțiilor unor ecuații sau sisteme de ecuații liniare;
2.3. Prelucrarea unor date sub formă de tabele, grafice sau diagrame în vederea înregistrării, reprezentării și prezentării acestora;
2.4. Descrierea patrulaterelor utilizând definiții și proprietăți ale acestora, în configurații geometrice date;
2.5. Descrierea proprietăților cercului și ale poligoanelor regulate înscrise într-un cerc;
2.6. Stabilirea relației de asemănare între triunghiuri;
2.7. Aplicarea relațiilor metrice într-un triunghi dreptunghic pentru determinarea unor elemente ale acestuia.

3. Utilizarea conceptelor și a algoritmilor specifici în diverse contexte matematice

3.1. Utilizarea unor algoritmi și a proprietăților operațiilor în efectuarea unor calcule cu numere reale;
3.2. Utilizarea transformărilor echivalente în rezolvarea unor ecuații și sisteme de ecuații liniare;
3.3. Alegerea metodei adecvate de reprezentare a problemelor în care intervin dependențe funcționale și reprezentări ale acestora;
3.4. Utilizarea proprietăților patrulaterelor în rezolvarea unor probleme;
3.5. Utilizarea proprietăților cercului în rezolvarea de probleme;
3.6. Utilizarea asemănării triunghiurilor în configurații geometrice date pentru determinarea de lungimi, măsuri și arii;
3.7. Deducerea relațiilor metrice într-un triunghi dreptunghic.

4. Exprimarea în limbajul specific matematicii a informațiilor, concluziilor și demersurilor de rezolvare pentru o situație dată

4.1. Folosirea terminologiei aferente noțiunii de număr real (semn, modul, opus, invers);
4.2. Redactarea rezolvării ecuațiilor și sistemelor de ecuații liniare;
4.3. Descrierea în limbajul specific matematicii a unor elemente de organizare a datelor;
4.4. Exprimarea în limbaj geometric a noțiunilor legate de patrulatere;
4.5. Exprimarea proprietăților cercului și ale poligoanelor în limbaj matematic;
4.6. Exprimarea în limbaj matematic a proprietăților unor figuri geometrice folosind asemănarea;
4.7. Exprimarea în limbaj matematic a relațiilor dintre elementele unui triunghi dreptunghic.

5. Analizarea caracteristicilor matematice ale unei situații date

5.1. Elaborarea de strategii pentru rezolvarea unor probleme cu numere reale;
5.2. Stabilirea unor metode de rezolvare a ecuațiilor sau a sistemelor de ecuații liniare;
5.3. Analizarea unor situații practice prin elemente de organizare a datelor;
5.4. Alegerea reprezentărilor geometrice adecvate în vederea optimizării calculării unor lungimi de segmente, a unor măsuri de unghiuri și a unor arii;
5.5. Interpretarea unor proprietăți ale cercului și ale poligoanelor regulate folosind reprezentări geometrice;
5.6. Interpretarea asemănării triunghiurilor în configurații geometrice;
5.7. Interpretarea unor relații metrice între elementele unui triunghi dreptunghic.

6. Modelarea matematică a unei situații date, prin integrarea achizițiilor din diferite domenii

6.1. Modelarea matematică a unor situații practice care implică operații cu numere reale;
6.2. Transpunerea matematică a unor situații date, utilizând ecuații și/sau sisteme de ecuații liniare;
6.3. Transpunerea unei situații date într-o reprezentare adecvată (text, formulă, diagramă, grafic);
6.4. Modelarea unor situații date prin reprezentări geometrice cu patrulatere;
6.5. Modelarea matematică a unor situații practice în care intervin poligoane regulate sau cercuri;
6.6. Implementarea unei strategii pentru rezolvarea unor situații date, utilizând asemănarea triunghiurilor;
6.7. Implementarea unei strategii pentru rezolvarea unor situații date, utilizând relații metrice în triunghiul dreptunghic.

Cuprins

Prezentarea manualului

MANUALUL TIPĂRIT

Manualul de Matematică de clasa a VII-a este structurat în 11 unități de învățare. Acestea, la rândul lor, sunt împărțite în lecții de predare-învățare, la care se adaugă aplicații practice, dar și alte metode complementare de învățare și exersare, precum proiecte, portofolii, investigații. În plus, pentru că matematica cere mult exercițiu, la sfârșitul manualului se găsește o culegere de probleme și teste recapitulative. Exercițiile și problemele de la sfârșitul lecțiilor sunt gândite cu diferite grade de dificultate, de la simplu la complex.

Pagina de deschidere a unității

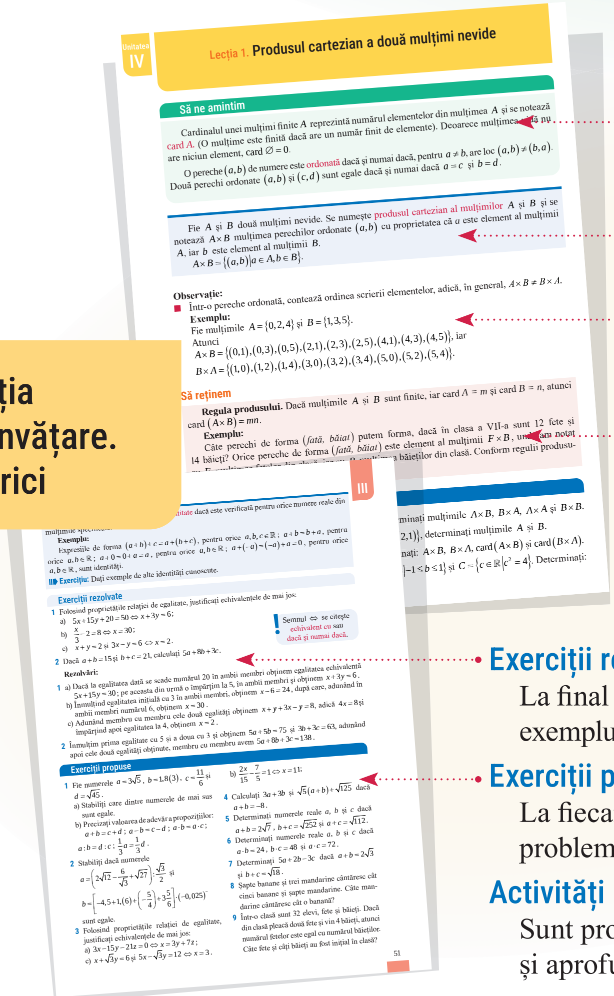
Numărul unității de învățare

Titlul unității de învățare

Titlurile lecțiilor și paginile la care pot fi găsite

Informații anume alese pentru a stârni curiozitatea și a demonstra că matematica este frumoasă

Lecția de învățare. Rubrici



Să ne amintim

La fiecare început de lecție, sunt reluate noțiunile importante învățate anterior.

Definiție

Sunt definite principalele noțiuni.

Observații

Sunt aduse în discuție elemente importante, excepții de la regulă.

Să reținem

Sunt prezentate noile noțiuni de teorie, cu explicații, demonstrații și exemple.

Exerciții rezolvate

La final de lecție sunt rezolvate câteva probleme/exerciții, ca exemplu pentru modul de calcul al diferitelor probleme/exerciții.

Exerciții propuse

La fiecare final de lecție sunt propuse câteva probleme/exerciții.

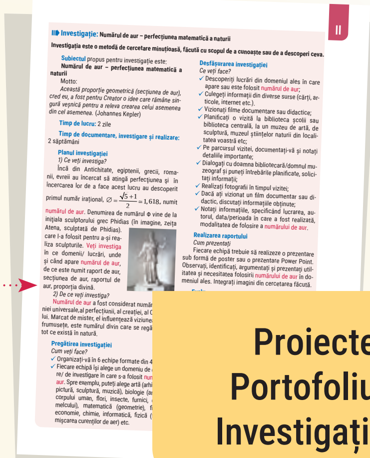
Activități individuale sau în echipă

Sunt propuse activități practice care să ajute la înțelegerea și aprofundarea noțiunilor învățate.

Pe lângă testele sumative de la sfârșitul fiecărei unități de învățare, manualul pune la dispoziție și alte metode de evaluare, precum observarea sistematică a activității și a comportamentului elevului, în timpul executării unor sarcini tip portofoliu, investigație, proiect.

Proiect

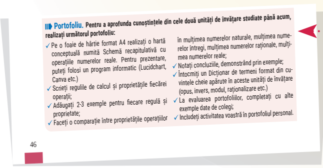
Prin ducerea la bun sfârșit a unui proiect, elevul va pune în practică noțiunile învățate și va înțelege cât de folositoare este matematica în viața de zi cu zi.



Investigație

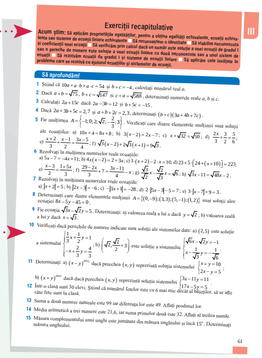
Este o metodă de cercetare minuțioasă, făcută cu scopul de a cunoaște sau de a descoperi ceva.

Proiecte. Portofoliu. Investigație



Portofoliu

Lucrările individuale sau în grup care se realizează pe parcursul anului școlar (testele de evaluare sumativă, fișele de activitate personală, referatele, proiectele, rezultatele investigațiilor, autoevaluare, fotografii care arată activități desfășurate etc.) vor fi cuprinse în portofoliul anual al elevului.



Acum știm

La fiecare început de secțiune de probleme recapitulative, sunt consemnate, cu pătrățel pentru bifă, noțiunile învățate și competențele căpătate. În funcție de câte căsuțe veți bifa, veți afla unde trebuie să mai învățați și cât trebuie să mai exersați.

Exerciții și probleme recapitulative

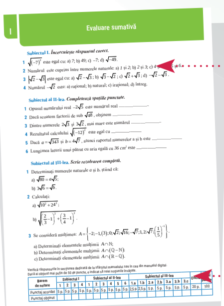
Probleme mai ușoare sau mai dificile, care trebuie rezolvate pentru fixarea cunoștințelor.

Fișă de observare

La fiecare final de unitate, după ce rezolvați testul, puteți verifica ce punctaj aveți, apoi veți completa fișa de observare pe care o găsiți în manualul digital. Fișa de observare este menită să vă autoevaluați activitatea, să vă dați seama când trebuie să cereți ajutorul profesorului sau să exersați mai mult.

Am înțeles cum...	Foarte bine	Bine	Satisfăcător
Să extrag rădăcina pătrată cu ajutorul factorilor primi			
Să definesc un număr irațional			
Să aproximez prin lipsă sau prin adaos			

Recapitulare. (Auto)Evaluare. Fișă de observare



Evaluare sumativă

Teste care vă verifică cunoștințele și care vă pregătesc pentru Evaluarea națională de la sfârșitul gimnaziului. Se adaugă împreună cu (Auto)Evaluarea în portofoliu.

Auto(evaluare)

Vă puteți verifica singuri și puteți, în funcție de rezultate, să cereți profesorului să vă mai explice anumite noțiuni.

Simboluri utilizate: Activitate individuală; Activitate în perechi; Activitate în grup; * Probleme cu grad sporit de dificultate

MANUALUL DIGITAL

Instrucțiuni pentru utilizarea manualului digital

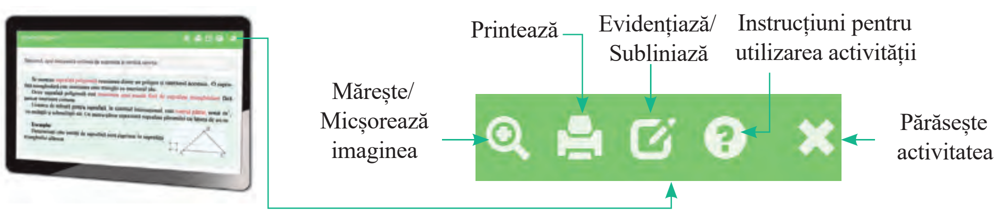
Știai că poți învăța la Matematică oriunde, fără să te plimbi cu manualul după tine? Nu ai nevoie decât de manualul digital. Îl poți folosi chiar și de pe telefon sau tabletă, ca să înveți și să exersezi în modul clasic, jucându-te, accesând tutoriale și filmulețe documentare sau rezolvând teste tip Trivia. Te ajută **AMII,** aplicațiile interactive care sunt prezente la tot pasul în manualul digital. Acestea sunt evidențiate în varianta digitală și în cea tipărită prin simbolurile următoare:

Pagina principală a manualului digital

Coperta digitală a manualului

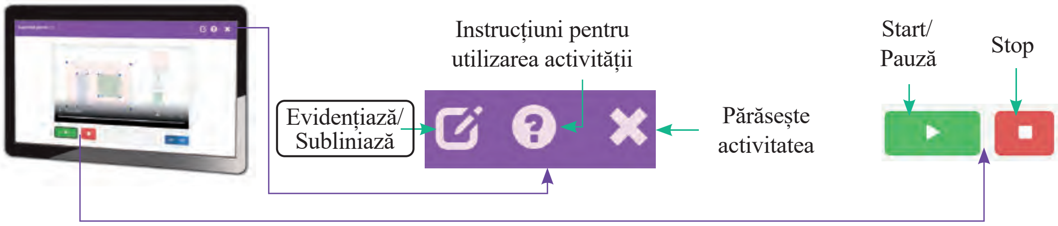
AMII STATICE

- fișe de lucru
- teste de evaluare



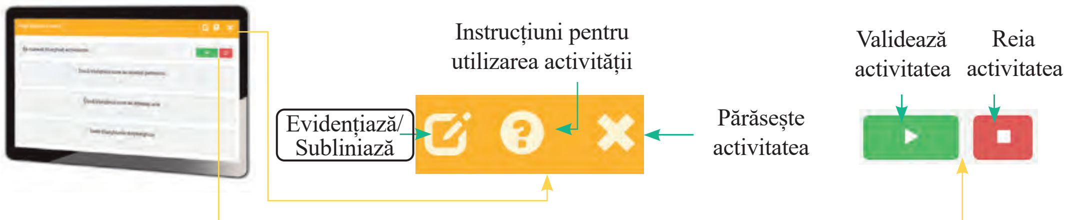
AMII ANIMATE

- secvențe video



AMII INTERACTIVE

- exerciții
- jocuri



Recapitulare inițială

Să ne amintim ce am învățat în clasa a VI-a

Algebră

✓ Mulțimi. Mulțimea numerelor naturale – divizibilitate

✓ Rapoarte. Proporții – rapoarte, procente, proporții, mărimi direct și invers proporționale

✓ Mulțimea numerelor întregi – operații cu numere întregi, ecuații și inecuații, probleme care se rezolvă cu ajutorul ecuațiilor

✓ Mulțimea numerelor raționale – operații cu numere raționale, ecuații în mulțimea numerelor raționale, probleme care se rezolvă cu ajutorul ecuațiilor

Geometrie

✓ Noțiuni geometrice fundamentale – unghiuri, perpendicularitate, paralelism, cerc

✓ Triunghiul – congruențe, triunghiuri particulare

Știm că:

Mulțimi de numere

Mulțimea numerelor naturale este mulțimea $\mathbb{N}=\{0,1,2,...\}$ și $\mathbb{N}^*$ reprezintă mulțimea numerelor naturale nenule.

Mulțimea numerelor întregi este $\mathbb{Z}=\{...,-3,-2,-1,0,+1,+2,+3,...\}$. Notăm cu $\mathbb{Z}^*$ mulțimea numerelor întregi nenule, $\mathbb{Z}^*=\mathbb{Z}\setminus\{0\}$, cu $\mathbb{Z}_+$ mulțimea numerelor întregi pozitive și cu $\mathbb{Z}_-$ mulțimea numerelor întregi negative. Avem $\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}$.

Mulțimea numerelor raționale este $\mathbb{Q}=\left\{\frac{a}{b}\middle| a,b\in\mathbb{Z}, b\neq 0\right\}$. Notăm cu $\mathbb{Q}^*$ mulțimea numerelor raționale nenule, $\mathbb{Q}^*=\mathbb{Q}\setminus\{0\}$, cu $\mathbb{Q}_+$ mulțimea numerelor raționale pozitive și cu $\mathbb{Q}_-$ mulțimea numerelor raționale negative. Avem $\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}$.

Axiome

Axioma dreptei: Prin două puncte distincte trece o singură dreaptă.

Axioma paralelelor (Postulatul lui Euclid): Printr-un punct exterior unei drepte trece o dreaptă și numai una paralelă cu dreapta dată.

Teoreme „cu renume”

• **Teorema unghiurilor opuse la vârf:** *Dacă două unghiuri sunt opuse la vârf atunci ele sunt congruente.*

• Suma măsurilor unghiurilor în jurul unui punct este de 360°.

• Printr-un punct, în plan, se poate construi o singură perpendiculară pe o dreaptă dată.

• Două drepte sunt paralele dacă și numai dacă formează cu o secantă o pereche de unghiuri alterne interne congruente, sau alterne externe congruente, sau corespondente congruente, sau interne de aceeași parte a secantei suplementare sau externe de aceeași parte a secantei suplementare.

• Suma măsurilor unghiurilor unui triunghi: Suma măsurilor unghiurilor unui triunghi este de 180°.

• **Teorema unghiului exterior:** *Măsura unui unghi exterior al unui triunghi este egală cu suma măsurilor unghiurilor interioare triunghiului neadiacente cu acesta.*

• **Proprietatea bisectoarei:** *Un punct aparține bisectoarei unui unghi, dacă și numai dacă este egal depărtat de laturile unghiului.*

• **Proprietatea mediatoarei:** *Un punct aparține mediatoarei unui segment, dacă și numai dacă este egal depărtat de extremitățile segmentului.*

• **Teorema medianei corespunzătoare ipotenuzei:** *Într-un triunghi dreptunghic, lungimea medianei corespunzătoare ipotenuzei este jumătate din lungimea ipotenuzei și reciproc.*

• **Teorema unghiului de 30°:** *Într-un triunghi dreptunghic cu măsura unui unghi egală cu 30° lungimea catetei opuse acestuia este jumătate din lungimea ipotenuzei și reciproc.*

• **Teorema lui Pitagora:** *Într-un triunghi dreptunghic suma pătratelor lungimilor catetelor este egală cu pătratul lungimii ipotenuzei și reciproc.*

Algebră

1 Determinați cardinalul mulțimii $M=\{x \mid x \in \mathbb{N}, x=2n-7, n \in \mathbb{N}, n \leq 50\}$.

2 Date fiind mulțimile $A=\{0,2,4,6\}$, $B=\{0,1,2,4,5\}$, $C=\{2,3,4,5,6,7\}$, calculați:
a) $A \cup C$; b) $A \cap B$; c) $C-A$; d) $(A \cup C)-B$.

3 Într-o clasă sunt 32 de elevi. Știind că 15 dintre ei joacă volei și 20 joacă baschet, aflați câți elevi practică ambele sporturi.

4 Determinați numerele naturale de forma $\overline{43ab}$ divizibile cu 20, unde a și b sunt cifre în baza 10.

5 Determinați cel mai mic număr natural divizibil cu 11 și care împărțit la 7 dă restul 2, iar împărțit la 9 dă restul 4.

6 Avem două cutii cu piese de lego, una conținând 134 și alta 195 de piese. Împărțindu-le la același număr de copii, rămân 14, respectiv 15 piese de lego în fiecare cutie. Aflați numărul de copii dacă:
a) este cel mai mic posibil; b) este divizibil cu 12.

7 Aflați câte numere mai mici decât 400 împărțite la 8, 9, 12 dau restul 5.

8 La festivitatea de premiere de la sfârșitul anului școlar, un profesor observă că, dacă elevii participanți s-ar alinia în rânduri de câte 8 elevi, ar rămâne 2 elevi, dacă s-ar alinia în rânduri de câte 10 elevi, ar rămâne 4 elevi, iar dacă s-ar alinia câte 12 elevi, ar rămâne 6 elevi. Determinați câți elevi au participat la festivitatea de premiere, dacă numărul elevilor participanți este mai mic decât 1000 și mai mare decât 900.

9 Știind că $\dfrac{3x+2y}{5x-y}=\dfrac{2}{5}$, determinați $\dfrac{x}{y}$.

10 Dacă x și y sunt invers proporționale cu $\dfrac{1}{3}$ și $\dfrac{1}{4}$, determinați $\dfrac{3x-y}{7x+y}$.

11 Suma numerelor naturale a, b și c este 360. Determinați a, b și c dacă sunt direct proporționale cu numerele 2, 3 și 5.

12 Calculați:
a) $(-5+17)-(-12+16-24):(-2)$; b) $-5+3\cdot\{-2+2\cdot[-4-2\cdot(-1)]\}$; c) $4\cdot[(-1)+5\cdot(-2)+3]$;
d) $|(-22):(-2)|-|(+51):(-17)|$; e) $(-25):(-5)-3\cdot\{-2-3\cdot[-8:(-2)-(-2)\cdot(-1)]\}$.

13 Rezolvați în mulțimea numerelor întregi ecuațiile:
a) $\dfrac{3}{4}x-\dfrac{1}{2}=7$; b) $|3x-2|=-3$; c) $-\dfrac{}{2}(3x+2)=18$; d) $\dfrac{3}{11}(x-7)=\dfrac{9}{22}$.

14 Efectuați:
a) $\left(\dfrac{8}{3}-\dfrac{4}{5}:\dfrac{6}{15}\right)\cdot 2\dfrac{1}{2}$; b) $2\cdot(3{,}75-4{,}5+9{,}25):0{,}4$; c) $\left(\dfrac{5}{3}\right)^5\cdot\left[\left(\dfrac{5}{3}\right)^2\right]^7:\left(\dfrac{5}{3}\right)^{16}$;
d) $15\cdot\left(\dfrac{21}{10}+\dfrac{1}{2}\right):\dfrac{6}{5}+\dfrac{6}{5}-0{,}4$; e) $1{,}02+\dfrac{49}{50}-1{,}1(6)\cdot\dfrac{3}{7}$.

15 Determinati x și y, numere întregi, astfel încât $\dfrac{x+3}{5}=\dfrac{1}{y-1}$.

Geometrie

1 Aflați măsura unui unghi dacă măsura complementului este de 4 ori mai mică decât a suplementului său.

2 Fie unghiurile adiacente AOB și AOC care au măsurile de 70° și 80°.
a) Determinați măsura unghiului format de bisectoarele celor două unghiuri;
b) Dacă OC' este semidreapta opusă lui OC să se determine măsura unghiului AOC'.

3 Fie trei unghiuri adiacente $\sphericalangle AOB$, $\sphericalangle BOC$ și $\sphericalangle COD$. Știind că $\sphericalangle AOB = 56^{\circ}20'$ și $\sphericalangle COD = 48^{\circ}35'$, aflați măsura unghiului BOC astfel încât punctele A, O și D să fie coliniare.

4 Suma măsurilor suplementului și complementului unui unghi este de 216°. Determinați măsura unghiului.

5 Unghiurile AOB și BOC sunt adiacente și suplementare, astfel încât $3\cdot(\sphericalangle AOB) = 2\cdot(\sphericalangle BOC)$. Determinați măsura unghiul AOB.

6 Se consideră două drepte paralele tăiate de o secantă. Arătați că bisectoarele a două unghiuri alterne interne congruente, sunt paralele.

7 Se consideră triunghiul ABC, cu $\sphericalangle BAC = 80^{\circ}$, $\sphericalangle ACB = 60^{\circ}$, AD bisectoarea unghiului BAC, cu $D \in BC$ și M un punct interior segmentului CD. Paralela prin M la AD intersectează AC în N. Demonstrați că triunghiul CMN este isoscel.

8 Pe cercul $\mathscr{C}(O,r)$, se consideră punctele A, B, C, D, în această ordine, astfel încât arcele au măsurile $\overset{\frown}{AB} = 100^{\circ}$, $\overset{\frown}{AC} = 220^{\circ}$ și $\overset{\frown}{CD} = 65^{\circ}$. Determinați măsura unghiului AOD.

9 Se consideră unghiul ascuțit AOB și dreptele $OC \perp OA$ și $OD \perp OB$, astfel încât punctele C și D să fie de aceeași parte a dreptei OB. Arătați că bisectoarele unghiurilor AOB și COD sunt perpendiculare.

10 Se consideră triunghiul ABC, cu $\sphericalangle A = 80^{\circ}$, $\sphericalangle B = 50^{\circ}$ și $AD \perp BC$, $D \in BC$. Bisectoarea interioară a unghiului C intersectează AD în punctul E, iar bisectoarea sa exterioară, în F. Determinați măsura unghiului CFE.

11 În triunghiul ABC, BE este bisectoarea unghiului ABC, $E \in AC$, iar CF este bisectoarea unghiului ACB, $F \in AB$ și $BE \cap CF = \{I\}$. Știind că $\sphericalangle BAC = 70^{\circ}$ și $\sphericalangle ACB = 60^{\circ}$, determinați măsura unghiului BIC.

12 Fie $\Delta ABC \equiv \Delta DEF$ cu $DE = 12$ cm, $EF = 16$ cm și $DF = 20$ cm. Calculați perimetrul ΔABC.

13 Pe latura BC a ΔABC cu $AB \equiv AC$ se consideră punctele E și F, astfel încât $BE \equiv EF \equiv FC$. Arătați că triunghiul AEF este isoscel.

14 Se consideră dreptele a și b care se intersectează în punctul O. Pe dreapta a se iau punctele A și B, de o parte și de alta a lui O, astfel încât $AO \equiv OB$, iar pe dreapta b se iau punctele C și D, de o parte și de alta a lui O, astfel încât $CO \equiv OD$. Arătați că $\Delta AOC \equiv \Delta BOD$.

15 În triunghiul ABC, dreptunghic în A, măsura unghiului B este de 30° și bisectoarea unghiului C intersectează AB în punctul D. Arătați că $CD = \dfrac{2}{3}AB$.

Evaluare inițială

Timp de lucru: 50 de minute.

Subiectul I. ***Completați spațiile punctate, astfel încât propozițiile să fie adevărate.***

1 Rezultatul calculului $-3+(-5)\cdot(+3)$ este … .

2 Dacă două unghiuri sunt interne de aceeași parte a secantei, iar măsura unuia dintre ele este de 42°, atunci celălalt unghi are … .

3 Dacă un triunghi echilateral are perimetrul de 24 dm, atunci latura lui este de … .

4 Măsura suplementului unui unghi de 54° este de $...^\circ$.

5 Dacă $\frac{x-7}{4}=\frac{9}{12}$ atunci numărul x este … .

6 Dacă un triunghi dreptunghic are mediana corespunzătoare ipotenuzei de 8 cm, atunci lungimea ipotenuzei este de … cm.

7 Scrisă ca fracție ordinară ireductibilă, fracția $0,2(4)$ este … .

8 Dacă din 9 kg de prune se obțin 5 kg de dulceață, atunci cantitatea de prune pentru 12 kg de dulceață este … .

9 Cel mai mic multiplu comun al numerelor 12 și 42 este … .

Subiectul al II-lea. ***Scrieți rezolvarea completă.***

1 a) Dacă x și y sunt direct proporționale cu 2 și 5, calculați $\frac{3x+2y}{6x-2y}$.

b) Aflați razele a două cercuri tangente exterioare, știind că acestea sunt invers proporționale cu 2 și 3, iar distanța dintre centrele lor este egală cu 10 cm.

c) Determinați numerele de forma $\overline{2a3b}$ divizibile cu 15.

2 Rezolvați ecuațiile în mulțimile indicate:

a) $1-5\cdot[-4(x-2)]=41$, $x\in\mathbb{Z}$.

b) $|1-x|+|3-3x|=16$, $x\in\mathbb{Z}$.

c) $\frac{1}{3}\left(x-\frac{5}{3}\right)+2x=1\frac{1}{9}$, $x\in\mathbb{Q}$.

3 Fie triunghiul ABC isoscel de bază BC, cu măsura unghiului A de 52° și P mijlocul laturii AC. Prelungim segmentul BP cu segmentul PQ astfel încât $PQ\equiv BP$.

a) Aflați măsura unghiului B al triunghiului ABC.

b) Arătați că $AQ \parallel BC$.

c) Arătați că ΔACQ este isoscel.

Verifică răspunsurile în secțiunea dedicată de la sfârșitul manualului sau în cea din manualul digital.
Dacă ai obținut mai puțin de 50 de puncte, este indicat să reiei noțiunile învățate.

Barem de notare	Subiectul I									Subiectul al II-lea									Oficiu	Total puncte
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1.a	1.b	1.c	2.a	2.b	2.c	3.a	3.b	3.c		
Punctaj acordat	5 p.	5 p.	5 p.	5 p.	5 p.	5 p.	5 p.	5 p.	5 p.	5 p.	5 p.	5 p.	5 p.	5 p.	5 p.	5 p.	5 p.	5 p.	10 p.	100
Punctaj obținut																				

Descarcă fișa de observare din manualul digital și completeaz-o.
Adaug-o la portofoliul personal.

Unitatea I

Mulțimea numerelor reale

Competențe specifice:
1.1, 2.1, 3.1, 4.1, 6.1


Die Coss Christoffs Rudolffs
Die schönen Exempeln der Coss
Durch
Michael Stifel
Gebessert vnd sehr gemehrt.
Den Innhalt des gantzen Buchs
such nach der Vorred.
Zu Königsperg in Preussen

Știai?
Simbolul pentru radical, $\sqrt{\ }$, a fost folosit prima dată în 1525, în lucrările lui Cristoff Rudolff (1499-1545), autorul primului manual german de Algebră.

Lecția 1. Rădăcina pătrată a pătratului unui număr natural

Să ne amintim

✓ Numărul natural b este pătrat perfect dacă există un număr natural a, astfel încât $a^2 = b$.
✓ Dacă $a^2 = b$, atunci b se numește pătratul lui a.

Exemple:

✓ 16 este pătrat perfect pentru că $4^2 = 16$; 81 este pătrat perfect pentru că $9^2 = 81$; 289 este pătrat perfect pentru că $17^2 = 289$.
✓ $1^2 = 1 \Rightarrow 1$ este pătratul lui 1; $6^2 = 36 \Rightarrow 36$ este pătratul lui 6; $10^2 = 100 \Rightarrow 100$ este pătratul lui 10; $0^2 = 0 \Rightarrow 0$ este pătratul lui 0.

Să reținem

Dacă b este un număr natural, pătrat perfect, numărul natural a pentru care $b = a^2$ se numește rădăcina pătrată a lui b.

Scriem $a = \sqrt{b}$.

Citim *rădăcina pătrată a lui b este egală cu a* sau *a este egal cu radical de ordin 2 din b*.

Operația prin care unui pătrat perfect $b \in \mathbb{N}$, număr natural, i se asociază un număr $a \in \mathbb{N}$, cu proprietatea că $b = a^2$, se numește operația de extragere a rădăcinii pătrate sau operația de extragere a radicalului.

Exemple:

$1^2 = 1 \Rightarrow 1 = \sqrt{1}$; $6^2 = 36 \Rightarrow 6 = \sqrt{36}$; $10^2 = 100 \Rightarrow 10 = \sqrt{100}$; $0^2 = 0 \Rightarrow 0 = \sqrt{0}$.

Exerciții rezolvate

$\sqrt{17^2} = 17;$

$\sqrt{2023^2} = 2023;$

$\sqrt{\left(5^5\right)^2} = 5^5;$

$\sqrt{(16 \cdot 4 + 225 : 5)^2} = 16 \cdot 4 + 225 : 5;$

$\sqrt{2^{420}} = \sqrt{\left(2^{210}\right)^2} = 2^{210}.$

! **Concluzie:** $\sqrt{n^2} = n$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Să reținem

În general, într-un calcul, operațiile de extragere a rădăcinii pătrate se vor efectua înaintea altor operații solicitate (ridicări la putere, înmulțiri/împărțiri, adunări/scăderi).

Exemple:

$\sqrt{81} + \sqrt{144} : 12 = 9 + 12 : 12 = 9 + 1 = 10$

$\sqrt{100} \cdot \sqrt{64} - \sqrt{15^2} = 10 \cdot 8 - 15 = 80 - 15 = 65$

Există și situații în care operațiile de extragere a rădăcinii pătrate se pot efectua după anumite operații algebrice.

Exemple:

$\sqrt{25\cdot 9}=\sqrt{225}=15$ și $\sqrt{25}\cdot\sqrt{9}=5\cdot 3=15$. Deci $\sqrt{25\cdot 9}=\sqrt{25}\cdot\sqrt{9}$.

$\sqrt{\frac{256}{4}}=\sqrt{64}=8$ și $\frac{\sqrt{256}}{\sqrt{4}}=\frac{16}{2}=8$. Deci $\sqrt{\frac{256}{4}}=\frac{\sqrt{256}}{\sqrt{4}}$.

$\sqrt{2.500}=\sqrt{25\cdot 100}=\sqrt{25}\cdot\sqrt{100}=5\cdot 10=50$.

$\sqrt{\frac{1.600}{64}}=\frac{\sqrt{16}\cdot\sqrt{100}}{\sqrt{64}}=\frac{4\cdot 10}{8}=\frac{40}{8}=5.$

Propoziție

$\sqrt{x}\cdot\sqrt{y}=\sqrt{x\cdot y}$, oricare ar fi $x, y\in\mathbb{N}$, pătrate perfecte.

$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}=\sqrt{\frac{x}{y}}$, oricare ar fi $x\in\mathbb{N}, y\in\mathbb{N}^*$, pătrate perfecte.

Ne punem întrebarea dacă în cazul operațiilor de adunare și scădere au loc relații similare. Efectuăm calculele și comparăm:

$\sqrt{25+144}=\sqrt{169}=13$ și $\sqrt{25}+\sqrt{144}=5+12=17$. Cum $13\neq 17$, $\sqrt{25+144}\neq\sqrt{25}+\sqrt{144}$.

$\sqrt{169-144}=\sqrt{25}=5$ și $\sqrt{169}-\sqrt{144}=13-12=1$. Cum $5\neq 1$, $\sqrt{169-144}\neq\sqrt{169}-\sqrt{144}$.

Rezultă că:

$\sqrt{x+y}\neq\sqrt{x}+\sqrt{y}$, pentru orice numere $x\in\mathbb{N}, y\in\mathbb{N}$.

$\sqrt{x-y}\neq\sqrt{x}-\sqrt{y}$, pentru orice numere $x\in\mathbb{N}, y\in\mathbb{N}, x>y$.

Exerciții rezolvate

1 Aflați latura pătratului a cărui arie este egală cu 256 cm^2.

2 Calculați:

a) $\sqrt{625}$; b) $\sqrt{484}$; c) $\sqrt{25\cdot 7-150:5^2}$.

Rezolvări:

1 Știm că $A_{\text{pătrat}}=l^2$. Avem egalitatea $l^2=256\Rightarrow l=\sqrt{256}\Rightarrow l=\sqrt{16^2}\Rightarrow l=16$ cm.

2 a) $\sqrt{625}=\sqrt{5^4}=\sqrt{\left(5^2\right)^2}=5^2=25$.

b) $\sqrt{484}=\sqrt{4\cdot 121}=\sqrt{4}\cdot\sqrt{121}=2\cdot 11=22$.

c) $\sqrt{25\cdot 7-150:5^2}=\sqrt{175-150:25}=\sqrt{175-6}=\sqrt{169}=13$.

Exerciții propuse

1 Stabiliți valoarea de adevăr a următoarelor propoziții:

A. $\sqrt{14}=7$;

B. $\sqrt{81}=9$;

C. $\sqrt{3^2+4^2}=3+4$;

D. $\sqrt{36}=-6$;

E. $\sqrt{16\cdot 9}=12$.

2 Completați spațiile punctate, astfel încât propoziția să fie adevărată.
Dacă $n = 150^2$, atunci 150 este .... a lui n și scriem ....

3 Calculați:

a) $\sqrt{400}$; b) $\sqrt{2.304}$; c) $\sqrt{324}$; d) $\sqrt{3.600}$.

4 Bunica Anei are o grădină sub formă de pătrat, cu suprafața de 1.600 m^2. Aflați care este lungimea gardului care înconjoară grădina.

5 Scrieți următoarele numere sub formă de pătrate perfecte, apoi calculați rădăcina pătrată a fiecăruia:

a) $2^4\cdot 3^2\cdot 5^4$;

b) 13^2-5^2;

c) 30^2+40^2;

d) 4^{2023}.

6 Copiați și completați tabelul de mai jos, unde $x\in\mathbb{N}$:

x	225	361		121		6.400		576	
$\sqrt{x}$	15		22		31		19		21

7 Rezolvați ecuațiile:

a) $2\left(x-\sqrt{1}\right)=\sqrt{16}$;

b) $\sqrt{25}\left(x-\sqrt{9}\right)=\sqrt{4}\left(x+\sqrt{9}\right)$.

8 Aflați $x\in\mathbb{N}$ din proporțiile:

a) $\dfrac{\sqrt{24}}{\sqrt{6}}=\dfrac{x+5}{12}$;

b) $\dfrac{x+2}{\sqrt{81}}=\dfrac{\sqrt{25\cdot 4}}{\sqrt{5^2-4^2}}$.

9 Demonstrați că numărul x este pătrat perfect și calculați $\sqrt{x}$:

a) $x=23\cdot 30-7\cdot 23$;

b) $x=2023+2022\cdot 2023$;

c) $x=5^{13}-5^{12}$.

* **10** Se consideră numărul $A = 1 + 3 + 5 + \ldots + 2023$. Demonstrați că A este pătrat perfect și calculați $\sqrt{A}$.

Lecția 2. Estimarea rădăcinii pătrate dintr-un număr rațional

Să ne amintim

Dacă b este un număr natural, pătrat perfect, numărul natural a pentru care $b = a^2$ se numește rădăcina pătrată a lui b.

Scriem $a = \sqrt{b}$.

$\sqrt{x} \cdot \sqrt{y} = \sqrt{x \cdot y}$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{N}$, pătrate perfecte.

$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} = \sqrt{\frac{x}{y}}$, oricare ar fi $x \in \mathbb{N}, y \in \mathbb{N}^*$, pătrate perfecte.

Ne propunem să aflăm dacă atunci când b este un număr rațional pozitiv există $\sqrt{b}$.

Exemple:

1 $\sqrt{2,25} = \sqrt{\frac{225}{100}} = \frac{\sqrt{225}}{\sqrt{100}} = \frac{15}{10} = \frac{3}{2}$ sau $\sqrt{2,25} = \sqrt{(1,5)^2} = 1,5$.

Cum $\frac{3}{2} = 1,5$ deducem că ambele variante de rezolvare sunt corecte.

2 $\sqrt{2,(7)} = \sqrt{\frac{27-2}{9}} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{9}} = \frac{5}{3}$.

Deducem că există rădăcină pătrată și pentru un număr rațional scris sub formă de fracție zecimală periodică.

Să reținem

Dacă b este un număr rațional pozitiv, numărul pozitiv a pentru care $b = a^2$ se numește rădăcina pătrată a lui b.

Scriem $a = \sqrt{b}$.

Citim rădăcina pătrată a lui b este egală cu a sau a este egal cu radical de ordin 2 din b.

Și în acest caz, avem:

$\sqrt{x} \cdot \sqrt{y} = \sqrt{x \cdot y}$, oricare ar fi x și y, numere raționale pozitive.

$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} = \sqrt{\frac{x}{y}}$, oricare ar fi x și y, numere raționale pozitive, $y \neq 0$.

Aplicăm:

$\sqrt{1,8^2} = 1,8$; $\sqrt{\frac{5^2}{7^2}} = \frac{5}{7}$; $\sqrt{\left(1,5^5\right)^2} = 1,5^5$; $\sqrt{(-1,6 \cdot 4)^2} = 1,6 \cdot 4$; $\sqrt{0,2^{20}} = \sqrt{\left(0,2^{10}\right)^2} = 0,2^{10}$.

! **Concluzie:** $\sqrt{x^2} = x$, pentru orice x număr rațional pozitiv.

Să ne amintim

Teorema lui Pitagora: *Într-un triunghi dreptunghic, pătratul lungimii ipotenuzei este egal cu suma pătratelor lungimilor catetelor.*

Exemple:

1 Aflați lungimea ipotenuzei unui triunghi dreptunghic, care are lungimile catetelor $c_1 = 5$ cm și $c_2 = 12$ cm.

2 Aflați lungimea unei catete a unui triunghi dreptunghic, știind că lungimea ipotenuzei este egală cu 10 cm și lungimea celeilalte catete este egală cu 8 cm.

Rezolvări:

1 $ip^2 = c_1^2 + c_2^2$. Avem $10^2 = c_1^2 + 8^2$. Rezultă că $c_1^2 = 100 - 64$. Deci $c_1 = 6$ cm.

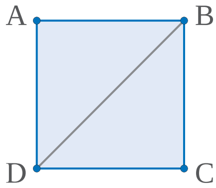
2 $ip^2 = c_1^2 + c_2^2$. Avem $ip^2 = 5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169$. Rezultă că $ip = 13$ cm.

Să reținem

Să estimăm înseamnă să apreciem o mărime/valoare pe baza unor date incomplete sau insuficiente!

Activitate în echipe

- ✓ Desenați pătratul *ABCD* cu lungimea laturii de 2 cm.
- ✓ Reprezentați diagonala *BD* a pătratului.
- ✓ Scrieți relația din **teorema lui Pitagora** în triunghiul *BCD*.
- ✓ Măsurați, cu rigla, lungimea ipotenuzei *BD*.
- ✓ Verificați rezultatele obținute cu colegul de bancă.



Ce observăm:

Conform relației din **teorema lui Pitagora,** stabilim că $BD = \sqrt{8}$ cm.

Din măsurătorile cu rigla, deducem că valorile sunt apropiate de 2,8 cm.

Ne punem întrebarea: cât este $\sqrt{8}$?

Având în vedere că măsurătorile dau valori diferite, dar apropiate de 2,8, tragem concluzia că valoarea lui $\sqrt{8}$ poate fi estimată cu 2,8.

Scriem $\sqrt{8} \simeq 2{,}8$ și citim: $\sqrt{8}$ este aproximativ egal cu 2,8.

! **Concluzie:** Pentru orice număr rațional pozitiv *x*, există rădăcina pătrată $\sqrt{x}$.

Observație:

- În multe aplicații, este necesar să exprimăm rădăcina pătrată a unui număr *x* printr-un număr natural sau rațional pozitiv. Acest lucru nu este posibil dacă acel număr nu se poate scrie ca pătratul altui număr. Prin urmare, pentru a putea da un răspuns cât mai corect, încadrăm numărul pentru care trebuie să aflăm rădăcina pătrată între două pătrate perfecte consecutive, astfel: $n^2 \le x < (n+1)^2 \Rightarrow n \le \sqrt{x} < n+1, n \in \mathbb{N}$.

Exerciții rezolvate

1 Încadrați $\sqrt{7}$ între două numere naturale consecutive.

2 Aflați lungimea laturii unui pătrat, dacă aria acestuia este egală cu:
a) 36 cm^2; b) 150 m^2; c) 256 dam^2; d) 15 mm^2.

3 Se consideră mulțimea:

$$A=\left\{4,5,\ \sqrt{5},\ -4,\ \sqrt{10},\ \frac{10}{3},\ 2\frac{1}{5},\ \sqrt{15}\right\}.$$

Determinați numerele din mulțimea A care se află între 3 și 4.

Rezolvări:

1 Avem: $4<7<9$. Rezultă că $\sqrt{4}<\sqrt{7}<\sqrt{9}\Rightarrow 2<\sqrt{7}<3$.

2 a) $l=\sqrt{36}=6$ cm; b) $l=\sqrt{150}$ m; c) $l=\sqrt{256}=16$ dam; d) $l=\sqrt{15}$ mm.

3 $4<4,5<5$;

$4<5<9\Rightarrow 2<\sqrt{5}<3$;

$-4\le -4<-3$;

$\sqrt{9}<\sqrt{10}<\sqrt{16}\Rightarrow 3<\sqrt{10}<4$;

$\frac{9}{3}<\frac{10}{3}<\frac{12}{3}\Rightarrow 3<\frac{10}{3}<4$;

$\frac{10}{5}<2\frac{1}{5}=\frac{11}{5}<\frac{15}{5}\Rightarrow 2<2\frac{1}{5}<3$;

$\sqrt{9}<\sqrt{15}<\sqrt{16}\Rightarrow 3<\sqrt{15}<4$.

Numerele cuprinse între 3 și 4 sunt: $\sqrt{10}$, $\frac{10}{3}$ și $\sqrt{15}$.

Exerciții propuse

1 Stabiliți valoarea de adevăr a următoarelor propoziții:

A. $\sqrt{2,25}=1,5$; **B.** $\sqrt{\frac{81}{25}}=\frac{9}{5}$; **C.** $\sqrt{2,56}=16$; **D.** $\sqrt{2\frac{7}{9}}=\frac{5}{9}$; **E.** $\sqrt{1,6\cdot 0,9}=0,12$.

2 Calculați:

a) $\sqrt{2,56}$; b) $\sqrt{4,84}$; c) $\sqrt{0,0025}$; d) $\sqrt{12,25}$.

3 Calculați:

a) $\sqrt{3\frac{13}{4}}$; b) $\sqrt{3\frac{6}{25}}$; c) $\sqrt{0,(4)}$; d) $\sqrt{2+\frac{7}{9}}$.

4 Aflați lungimea laturii unui pătrat, știind că aria pătratului este egală cu:
a) 144 cm^2; b) 29 m^2; c) 14 hm^2 ; d) 1,44 dam^2.

5 Estimați numerele: $\sqrt{55}$; $\sqrt{260}$; $\sqrt{395}$, încadrându-le între două numere naturale consecutive.

6 Se consideră mulțimea $A=\left\{\sqrt{200},-\sqrt{200}\right\}$. Estimați fiecare element al mulțimii A, încadrându-l între două numere întregi consecutive.

7 Determinați numărul natural n, știind că $n<\sqrt{390}<n+1$.

8 Determinați mulțimile:

$$A=\left\{x\in\mathbb{N}\,\middle|\,2\le\sqrt{x}<16\right\};\ B=\left\{x\in\mathbb{N}\,\middle|\,5\frac{2}{3}<x^2<9\frac{2}{3}\right\}.$$

9 Desenați un dreptunghi cu lungimea egală cu 6 cm și lățimea egală cu 4 cm. Măsurați lungimea diagonalei dreptunghiului și estimați numărul $\sqrt{52}$.

Lecția 3. Numere iraționale, exemple

Să ne amintim

$\mathbb{Q}=\left\{\frac{x}{y}\middle| x, y\in\mathbb{Z}, y\neq 0\right\}$ este mulțimea numerelor raționale.

Oricare ar fi două numere raționale x, y avem $x+y;\ x-y;\ x\cdot y;\ \frac{x}{y},\ y\neq 0\in\mathbb{Q}$.

a) Oricare ar fi un număr rațional, se poate scrie în mod unic sub una din formele:
- ✓ fracție zecimală finită;
- ✓ fracție zecimală infinită (periodică simplă);
- ✓ fracție zecimală infinită (periodică mixtă).

b) Orice fracție zecimală, finită sau periodică, este un număr rațional.

Exemple:

a) $\frac{23}{5}=4,6;\ ^{3)}\frac{37}{33}=\frac{111}{99}=1,(12);\ \frac{211}{90}=2,3(4).$

b) $7,2=\frac{72^{(2}}{10}=\frac{36}{5};\ 2,(15)=\frac{215-2}{99}=\frac{213^{(3}}{99}=\frac{71}{33};\ 1,3(2)=\frac{132-13}{90}=\frac{119}{90}.$

Să reținem

Numim număr irațional orice număr care nu este rațional.

Dacă un număr rațional $x\in\mathbb{Q}$ nu este pătrat perfect sau nu poate fi scris ca un raport de pătrate perfecte, atunci $\sqrt{x}\notin\mathbb{Q}$.

Un număr este irațional dacă și numai dacă se scrie sub formă de fracție zecimală infinită și neperiodică.

Mulțimea numerelor iraționale este mulțimea tuturor fracțiilor zecimale cu o infinitate de zecimale, care nu se succed periodic.

Mulțimea numerelor raționale și mulțimea numerelor iraționale nu au niciun element comun (sunt mulțimi disjuncte).

Exemple de numere iraționale

$\sqrt{2}$

Vrem să vedem dacă numărul $\sqrt{2}$ poate fi scris ca o fracție ireductibilă (un număr rațional).

Ne întrebăm: $\sqrt{2}=\frac{a}{b}$, unde $a,b\in\mathbb{N}$, este $\frac{a}{b}$ fracție ireductibilă?

Încercăm să rezolvăm: $\sqrt{2}=\frac{a}{b}\Rightarrow a=b\sqrt{2}\Rightarrow a^2=2b^2\Rightarrow a\,\vdots\,2\Rightarrow a=2\cdot k, k\in\mathbb{N}^*$.

Din $a=b\sqrt{2}\Rightarrow a^2=2b^2\Rightarrow(2k)^2=2b^2\Rightarrow 4k^2=2b^2\Rightarrow 2k^2=b^2\Rightarrow b^2\,\vdots\,2\Rightarrow b\,\vdots\,2$.

Prin urmare, avem $a\,\vdots\,2$ și $b\,\vdots\,2$, deci fracția $\frac{a}{b}$ se poate simplifica cu 2, ceea ce contrazice presupunerea inițială, că fracția $\frac{a}{b}$ este ireductibilă.

Tragem concluzia că nu există două numere naturale a și b, astfel încât $\sqrt{2}=\frac{a}{b},\ a,b\in\mathbb{N},\ b\neq 0$.

În concluzie, $\sqrt{2}$ nu este număr rațional.

Numărul π

Acest număr celebru reprezintă raportul dintre perimetrul (circumferința) și diametrul unui cerc. π este o literă grecească, prima literă a cuvântului perimetros, perimetru în limba greacă. Notația a fost introdusă, în 1706, de matematicianul William Jones, dar raportul a fost calculat, cu destulă precizie, cu mult înainte, de pildă de Arhimede în 250 î.H.

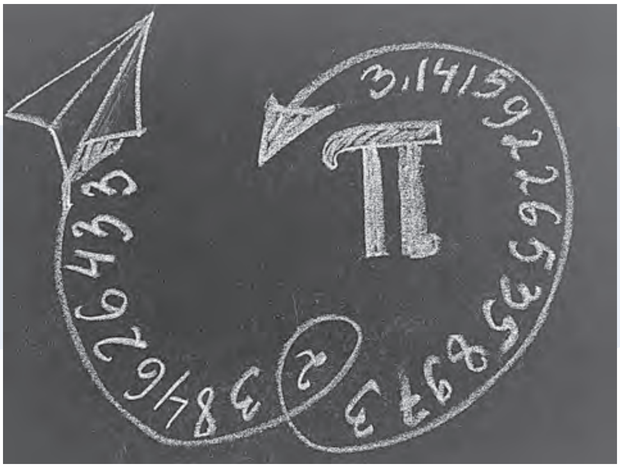
Activitate în echipe

Folosind un compas, trasăm trei cercuri care au lungimile razelor egale cu 3 cm, 6 cm și 9 cm.

Diametrele lor vor avea lungimile egale cu 6 cm, 12 cm și 18 cm.

- ✓ Decupăm cercurile și le măsurăm lungimile cu ajutorul unei sfori și al riglei.
- ✓ Împărțim, pentru fiecare cerc, lungimea cercului la diametru.
- ✓ Calculând cât mai precis aceste rapoarte, observăm că de fiecare dată obținem aproximativ 3,14.
- ✓ Concluzionăm că raportul dintre lungimea unui cerc și diametrul său este un număr constant.
- ✓ Numărul care exprimă acest raport se notează cu litera grecească π și se citește *pi*.

! Începând din 2019, în data de 14 martie (3/14 în formatul anglo-saxon lună/zi) este sărbătorită Ziua π, desemnată și Ziua Internațională a Matematicii.



Exerciții propuse

1 Scrieți:

a) trei numere naturale pătrate perfecte;

b) trei numere raționale, care nu sunt numere naturale;

c) trei numere iraționale.

2 Se consideră mulțimea:

$$A=\left\{\sqrt{8},\ 2\cdot\sqrt{256},\ \frac{\sqrt{49}}{14},\ \sqrt{2^5},\ \sqrt{5^2\cdot 7^2},\ \sqrt{5\cdot 7^2}\right\}.$$

a) Determinați elementele mulțimii *A*, care sunt numere întregi.

b) Determinați elementele mulțimii *A*, care sunt numere raționale.

c) Determinați elementele mulțimii *A*, care sunt numere iraționale.

3 Precizați care dintre următoarele numere sunt iraționale:

$$a=\sqrt{3^2\cdot 5};\ b=\sqrt{7^2\cdot 8^3};\ c=\sqrt{\frac{4^4}{9^6}};\ d=\sqrt{0{,}01};\ e=\sqrt{\frac{\sqrt{5^6}}{25}};\ f=\sqrt{4^2+5^2}\ .$$

Lecția 4. Mulțimea numerelor reale. Incluziunile $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

Să ne amintim

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots, n, \dots\}$ – mulțimea numerelor naturale

$\mathbb{Z} = \{\dots, -n, \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, n, \dots\}$ – mulțimea numerelor întregi

$\mathbb{Q} = \left\{\frac{m}{n} \middle| m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\right\}$ – mulțimea numerelor raționale

✓ Există numere iraționale.
✓ Mulțimea numerelor raționale și mulțimea numerelor iraționale sunt disjuncte.
✓ Știm că $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

Exemple:
$0 \in \mathbb{N} \Rightarrow 0 \in \mathbb{Z} \Rightarrow 0 \in \mathbb{Q}$; $-5 \in \mathbb{Z} \Rightarrow -5 \in \mathbb{Q}$; $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q} \Rightarrow \sqrt{2} \notin \mathbb{Z} \Rightarrow \sqrt{2} \notin \mathbb{N}$.

Să reținem

Numim mulțimea numerelor reale (și o notăm cu $\mathbb{R}$) reuniunea dintre mulțimea numerelor raționale și mulțimea numerelor iraționale.

Totodată, definim:

$\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} | x \geq 0\}$ – mulțimea numerelor reale pozitive;

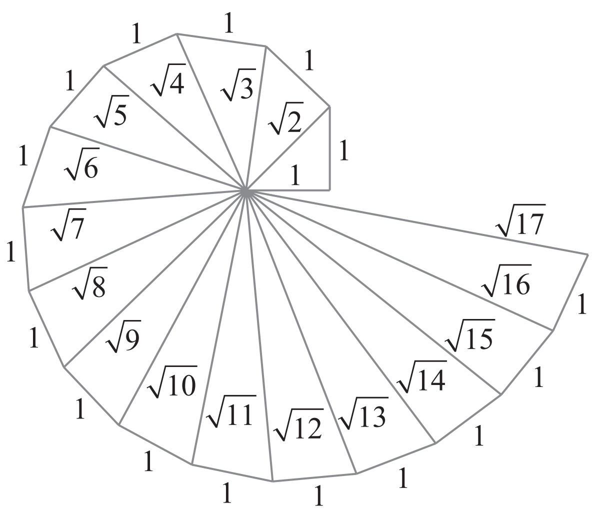
$\mathbb{R}_- = \{x \in \mathbb{R} | x \leq 0\}$ – mulțimea numerelor reale negative;

$\mathbb{R}^* = \{x \in \mathbb{R} | x \neq 0\}$ – mulțimea numerelor reale nenule.

Mulțimea numerelor iraționale reprezintă diferența $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$.

Activitate individuală: Spirala radicalilor

✓ Construiți, cu instrumentele din trusa de geometrie, modele ale spiralei radicalilor, având drept model figura atașată.
✓ Puteți continua spirala cât doriți.
✓ Puteți alege lungimea catetei cu care începeți construcția cu altă valoare.
✓ Interpretați rezultatele obținute împreună cu colegii.



Exerciții propuse

1 Dați câte trei exemple de numere care aparțin următoarelor mulțimi:
$\mathbb{N}, \mathbb{Z}-\mathbb{N}, \mathbb{Q}^*, \mathbb{R}-\mathbb{Q}, \mathbb{R}_+, \mathbb{R}_-$.

2 Determinați valoarea de adevăr pentru fiecare din propozițiile următoare:

a) $6 \in \mathbb{Z}$; b) $-1 \in \mathbb{Q}$; c) $0 \notin \mathbb{N}$; d) $\frac{6}{3} \in \mathbb{Z}$;

e) $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$; f) $\mathbb{Z} \subset \mathbb{N}$; g) $\sqrt{2^4} \in \mathbb{N}$;

h) $-5,2(7) \in \mathbb{Q}$; i) $\sqrt{1\frac{9}{16}} \notin \mathbb{Q}$; j) $\left(\frac{5}{3}\right)^{-2} \in \mathbb{R}$.

3 Transformați în fracții zecimale sau în fracții periodice următoarele numere:

a) $-\frac{17}{5}$; b) $\frac{5}{22}$; c) $\frac{27}{8}$; d) $\frac{17}{6}$; e) $\frac{15}{7}$; f) $\frac{6}{20}$.

4 Transformați următoarele numere în fracții ordinare ireductibile:
a) 5,42; b) 0,1(2); c) 1,55; d) –2,3(45); e) –1,1; f) –3,44(5).

5 Precizați care dintre numerele următoare sunt iraționale:

a) $\sqrt{1728}$; b) $\sqrt{1024}$; c) $\sqrt{1875}$; d) $-\sqrt{6480}$.

6 Se consideră mulțimea:

$$A=\left\{\sqrt{81},\ -\frac{2}{3},\ -\sqrt{5},\ \sqrt{\frac{6^4}{9}},\ 0,\ -1\frac{1}{5},\ 3,(6),\ \sqrt{200},\ -\frac{\sqrt{4^2}}{\sqrt{16}},\ \left(\frac{1}{2}\right)^{-1}\right\}.$$

Determinați: $A \cap \mathbb{Q}; A \cap \mathbb{N}; A \cap \mathbb{R}^*; A-\mathbb{R}$.

7 Determinați $x \in \mathbb{Z}$, știind că:

a) $\sqrt{\frac{16}{x}} \in \mathbb{N}$, $x \neq 0$;

b) $\sqrt{\frac{-48}{x}} \in \mathbb{N}$, $x \neq 0$;

c) $\sqrt{\frac{12}{|x|}}$, $x \neq 0$.

8 Aflați numărul rațional a, știind că: $(a-3)\sqrt{3}-5 \in \mathbb{Q}$.

9 Stabiliți valoarea de adevăr a următoarelor propoziții:

a) $\sqrt{0,(1)} \notin \mathbb{Q}$;

b) $1+3+5+...+199 \notin \mathbb{N}$;

c) $3^{50}+3^{51} \in \mathbb{Q}$;

d) $\sqrt{3^{50}+3^{51}} \in \mathbb{R}$.

Lecția 5. Scoaterea factorilor de sub radical, introducerea factorilor sub radical

Să ne amintim!

$\sqrt{n^2} = n$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

$\sqrt{a^2} = a$, pentru orice $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$.

Numim scoaterea factorului a de sub radical scrierea expresiei $\sqrt{a^2 \cdot b}$ sub forma $a\sqrt{b}$, pentru orice $a,\ b \in \mathbb{N}$.

Să reținem

Când ni se cere să scoatem factori de sub radical, scriem numărul $\sqrt{n}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, sub forma $a\sqrt{b}$, pentru orice $a,\ b \in \mathbb{N}$, unde b nu are ca divizor niciun pătrat perfect mai mare decât 1.

Exemple:

a) $\sqrt{200} = \sqrt{100 \cdot 2} = \sqrt{100} \cdot \sqrt{2} = 10\sqrt{2}$

b) $\sqrt{125} = \sqrt{25 \cdot 5} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{5} = 5\sqrt{5}$

c) $\sqrt{252} = \sqrt{36 \cdot 7} = \sqrt{36} \cdot \sqrt{7} = 6\sqrt{7}$

d) $\sqrt{3\pi^2} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{\pi^2} = \sqrt{3} \cdot \pi = \pi\sqrt{3}$

Pentru a putea să scoatem în evidență pătratele perfecte, ne folosim de descompunerea în factori primi, după care scriem numărul ca produs de puteri.

Exemple:

$$\sqrt{300} = \sqrt{2^2 \cdot 5^2 \cdot 3} = 2 \cdot 5\sqrt{3} = 10\sqrt{3}$$

$$\begin{array}{r|l} 300 & 2 \\ 150 & 2 \\ 75 & 3 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$$\sqrt{720} = \sqrt{2^4 \cdot 3^2 \cdot 5} = 2^2 \cdot 3\sqrt{5} = 12\sqrt{5}$$

$$\begin{array}{r|l} 720 & 2 \\ 360 & 2 \\ 180 & 2 \\ 90 & 2 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$$\sqrt{294} = \sqrt{2 \cdot 3 \cdot 7^2} = 7\sqrt{2 \cdot 3} = 7\sqrt{6}$$

$$\begin{array}{r|l} 294 & 2 \\ 147 & 3 \\ 49 & 7 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

$$\sqrt{\frac{12}{25}} = \sqrt{\frac{2^2 \cdot 3}{5^2}} = \frac{2\sqrt{3}}{5}$$

$$\sqrt{\frac{216}{49}} = \frac{\sqrt{216}}{\sqrt{49}} = \frac{\sqrt{36 \cdot 6}}{7} = \frac{\sqrt{36} \cdot \sqrt{6}}{7} = \frac{6\sqrt{6}}{7}$$

$$\begin{array}{r|l} 216 & 2 \\ 108 & 2 \\ 54 & 2 \\ 27 & 3 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

Observație:

- În cazul în care nu cunoaștem semnul lui a (nu știm dacă a este pozitiv sau negativ), vom scrie: $\sqrt{a^2 \cdot b} = |a|\sqrt{b}$, unde $a, b \in \mathbb{R},\ b \geq 0$.

  Exemple:

  $\sqrt{7a^2} = \sqrt{a^2} \cdot \sqrt{7} = |a|\sqrt{7}$

  $\sqrt{25x^8} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{x^8} = 5x^4$

  $\sqrt{2x^4y^6} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{x^4} \cdot \sqrt{y^6} = \sqrt{2}x^2|y^3|$.

Operația inversă scoaterii factorului a de sub radical se numește introducerea factorilor sub radical.

Să reținem

Vom scrie: $a\sqrt{b} = \sqrt{a^2 \cdot b}$, pentru orice $a \geq 0,\ b \geq 0$.

Exemple:

$2\sqrt{3} = \sqrt{2^2 \cdot 3} = \sqrt{12}$

$5\sqrt{7} = \sqrt{5^2 \cdot 7} = \sqrt{175}$

$1,2\sqrt{3} = \sqrt{(1,2)^2 \cdot 3} = \sqrt{1,44 \cdot 3} = \sqrt{4,32}$

Dacă $a < 0$ și $b \geq 0$. Vom scrie: $a\sqrt{b} = -\sqrt{a^2 \cdot b}$.

Exemple:

$-2\sqrt{3} = -\sqrt{2^2 \cdot 3} = -\sqrt{12}$

$-5\sqrt{7} = -\sqrt{5^2 \cdot 7} = -\sqrt{175}$

$-1,2\sqrt{3} = -\sqrt{(1,2)^2 \cdot 3} = -\sqrt{1,44 \cdot 3} = -\sqrt{4,32}$

! Introducem sub radical doar numere pozitive!

Exerciții propuse

1 Scoateți factorii de sub radicali:

a) $\sqrt{3^2 \cdot 5}$; b) $\sqrt{1^{20} \cdot 13}$; c) $\sqrt{(-5)^2 \cdot 5}$; d) $\sqrt{(-4)^4 \cdot 11}$; e) $\sqrt{3^2 \cdot 5^2 \cdot 7}$;

f) $\sqrt{(-10)^{10} \cdot 5^2 \cdot 13}$; g) $\sqrt{13^6 \cdot 5}$; h) $\sqrt{23^4 \cdot 5 \cdot 19^0}$; i) $\sqrt{3^2 \cdot (-7)^4 \cdot 5}$; j) $\sqrt{3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^4 \cdot 29}$

2 Scoateți factorii de sub radicali:

a) $\sqrt{3^4 \cdot 5^5}$; b) $\sqrt{11^{20} \cdot 13^3}$; c) $\sqrt{5^7}$; d) $\sqrt{(-4)^4 \cdot 11^5}$; e) $\sqrt{3^{12} \cdot 5^{11}}$;

f) $\sqrt{5^3 \cdot 5^7 \cdot 5^2 \cdot 7^3 \cdot 7^7 \cdot 7^3}$; g) $\sqrt{2^{2000}}$; h) $\sqrt{2^{101}}$; i) $\sqrt{2^{n+1}}$, $n \in \mathbb{N}$; j) $\sqrt{3^{2n+1}}$, $n \in \mathbb{N}$

3 Folosind descompunerea în produs de puteri de numere prime, scoateți factorii de sub radicali:

a) $\sqrt{96}$; $\sqrt{72}$; $\sqrt{48}$; $\sqrt{44}$; $\sqrt{63}$;

b) $\sqrt{275}$; $\sqrt{288}$; $\sqrt{192}$; $\sqrt{125}$; $\sqrt{250}$;

c) $\sqrt{3.000}$; $\sqrt{1.260}$; $\sqrt{6.615}$; $\sqrt{1.575}$; $\sqrt{21.600}$.

4 Scoateți factorii de sub radical:

a) $\sqrt{\frac{25x^2}{49}}, x>0$; b) $\sqrt{\frac{128x^6}{25}}, x>0$; c) $\sqrt{\frac{7x^7}{64y^2}}, x>0, y>0$; d) $\sqrt{\frac{x^3y^3}{81}}, x>0, y>0$; e) $\sqrt{\frac{x^3}{100}}, x<0$;

f) $\sqrt{x^5y^2}, x<0, y<0$.

5 Scrieți numerele următoare, introducând factorii sub radicali:

a) $12\sqrt{2}$; b) $-4\sqrt{7}$; c) $\frac{1}{2}\sqrt{3}$; d) $-\frac{3}{5}\sqrt{\frac{3}{7}}$; e) $1,2\sqrt{5}$; f) $-0,5\sqrt{24}$; g) $x\sqrt{13}, x>0$; h) $x^2\sqrt{2y^2}$.

6 Stabiliți valoarea de adevăr a următoarelor propoziții:

a) $2\sqrt{2}=\sqrt{8}$; b) $-2\sqrt{7}=\sqrt{28}$; c) $\frac{1}{2}\sqrt{3}=\sqrt{\frac{3}{4}}$; d) $5\cdot\sqrt{6}=\sqrt{6}\cdot\sqrt{5}$; e) $\sqrt{3^4\cdot 7}=9\sqrt{7}$;

f) $\sqrt{(-10)^{10}}=(-10)^5$.

7 Calculați:

a) $\sqrt{0,4:1.000}$; b) $-2\cdot\frac{\sqrt{16}}{\sqrt{4}}$; c) $\sqrt{\frac{3^2}{4^4}}+\sqrt{\frac{1}{64}}$; d) $\sqrt{3^4\cdot 4^5-3^5\cdot 4^4}$;

e) $\sqrt{\frac{-16}{-25}}+\sqrt{\frac{(-5)^2}{100}}$; f) $\sqrt{\frac{(-9)\cdot(-36)}{225}}-7\sqrt{(-4)^2}$.

8 Determinați numerele reale *a* și *b*, pentru care este îndeplinită condiția:

a) $\sqrt{507}=a\sqrt{b}$;

b) $-\sqrt{216}=a\sqrt{b}$.

9 Scoateți factorii de sub radicali, știind că *n* este număr natural:

a) $\sqrt{3^{2n}}$; b) $\sqrt{7^{2n}\cdot 13^{2n+2}}$; c) $\sqrt{5^{2n+1}}$; d) $\sqrt{(-3)^{4n}\cdot 13^{2n}}$; e) $\sqrt{3^{2n+3}\cdot 5^{6n}}$; f) $\sqrt{16^n\cdot 25^n}$.

10 Calculați:

a) $\sqrt{\left(2\sqrt{5}+3\right)^2}$;

b) $\sqrt{\left(-5\sqrt{2}-49\right)^2}$;

c) $\sqrt{\left(10+10\sqrt{3}\right)^2}-\sqrt{\left(-10-10\sqrt{3}\right)^2}$.

Lecția 6. Compararea și ordonarea numerelor reale. Reprezentarea numerelor reale pe axa numerelor prin aproximări

O dreaptă pe care s-au fixat 3 elemente:
✓ o origine (punctul O);
✓ o unitate de măsură;
✓ un sens pozitiv (de la stânga la dreapta);
se numește axa numerelor.

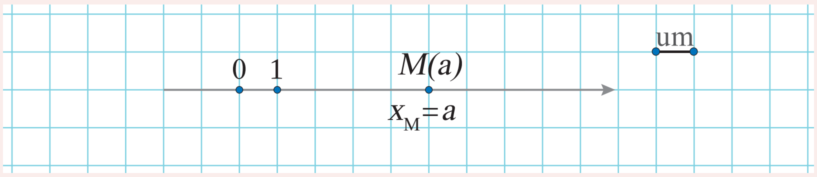
Să reținem

Dacă dorim să comparăm și să ordonăm două numere (naturale, întregi sau raționale), le reprezentăm pe axa numerelor și ținem cont de următoarea regulă:

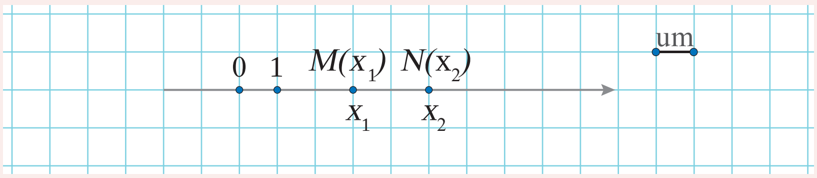
Dacă avem două numere așezate pe axa numerelor, întotdeauna cel din stânga este mai mic sau egal cu cel din dreapta (așa am definit relația de ordine).

Proprietățile relației de ordine:
✓ este reflexivă: $x \leq x$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$
✓ este antisimetrică: $x \leq y$, $y \leq x$ oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$, atunci $x = y$
✓ este tranzitivă: $x \leq y$ și $y \leq z$, atunci $x \leq z$, oricare ar fi $x, y, z \in \mathbb{R}$.

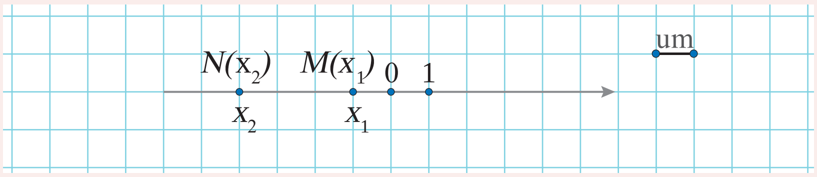
Numărul real a este reprezentat pe axă prin punctul M. Scriem $M(a)$ sau $x_M = a$. Citim:
✓ a este coordonata punctului M;
✓ punctul M este reprezentarea numărului real a pe axa numerelor, iar a este coordonata punctului M.



În condițiile în care ne raportăm la axa numerelor, știm că:
✓ dacă avem două numere raționale x_1 și x_2 care verifică relația $x_1 \leq x_2$, atunci, pe axa numerelor, $M(x_1)$ este reprezentat în stânga punctului $N(x_2)$ sau este identic cu $N(x_2)$.



✓ dacă avem două numere raționale x_1 și x_2 care verifică relația $x_1 \geq x_2$, atunci, pe axa numerelor, $M(x_1)$ este reprezentat în dreapta punctului $N(x_2)$ sau este identic cu $N(x_2)$.



Exemple:
$1 < 7$ pentru că $M(1)$ este reprezentat pe axă în stânga punctului $N(7)$.
$-4{,}3 < 2$ pentru că $A(-4{,}3)$ este reprezentat pe axă în stânga punctului $B(2)$.
$-13{,}5 \geq -15$ pentru că $C(-13{,}5)$ este reprezentat pe axă în dreapta punctului $D(-15)$.